

ECOLE D'ÉTÉ JACA 2012

# Introduction à l'analyse mathématique de l'équation de Helmholtz

HÉLÈNE BARUCQ, JULIEN DIAZ, SÉBASTIEN  
TORDEUX

Projet Magique 3D, INRIA Bordeaux Sud-Ouest

LMA - UMR CNRS 5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Septembre 2012

# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'équation de Helmholtz dans l'espace libre</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction . . . . .	4
1.2	La condition de radiation de Sommerfeld . . . . .	7
1.2.1	Fonction de Green et existence de solution sortante . . . . .	7
1.2.2	Unicité de la solution sortante de l'équation d'Helmholtz . . . . .	14
1.3	Le principe d'amplitude limite . . . . .	17
1.4	Le principe d'absorption limite . . . . .	21

# Chapitre 1

## L'équation de Helmholtz dans l'espace libre

### 1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre consacré aux phénomènes de propagation d'ondes établis, nous nous plaçons dans l'espace libre (ceci permet un exposé un peu moins technique des résultats à l'aide des fonctions de Green). Nous notons  $\square$  le d'Alembertien :

$$\square v(\mathbf{x}, t) = -\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t). \quad (1.1)$$

Nous nous intéressons aux problèmes de D'Alembert

$$\square v(\mathbf{x}, t)(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et } t \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

dont les solutions et les termes sources ont une dépendance temporelle harmonique

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}, t) = \Re(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)), \\ g(\mathbf{x}, t) = \Re(f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)). \end{cases} \quad (1.3)$$

Les deux fonctions  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  sont appelées les phaseurs de la solution et du terme source. Ils sont reliés par l'équation de Helmholtz qui prend la forme

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.4)$$

Privé de ses conditions initiales, le problème de d'Alembert est mal posé : il n'y a plus unicité de sa solution. En effet, les ondes planes sont solutions de l'équation des ondes homogène ( $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  avec  $\|\mathbf{k}\| = \frac{\omega}{c}$ )

$$u(\mathbf{x}, t) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (1.5)$$

De même, le problème de Helmholtz est lui aussi mal posé. Il est facile de construire des solutions homogènes en considérant les phaseurs des ondes planes

$$u_k(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (1.6)$$

D'autre part, il n'y a pas génériquement existence de solutions dans l'espace de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^3)$  mais seulement dans un espace beaucoup plus grand : l'espace des fonctions localement  $H^1$

$$H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : \varphi u \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \right\}. \quad (1.7)$$

Dans ce chapitre, nous montrons comment il est possible de définir de manière naturelle une solution dite sortante de l'équation de Helmholtz en s'appuyant sur des arguments physiques. Nous présentons plus particulièrement les bases mathématiques de cette théorie sous trois points de vue équivalents : la condition de radiation de Sommerfeld, le principe d'amplitude limite, le principe d'absorption limite.

**La condition de radiation de Sommerfeld** Cette approche consiste à garantir l'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz en imposant à l'infini à la solution de l'équation de Helmholtz la condition d'ondes sortantes ou de radiation de Sommerfeld qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Formellement, ces deux conditions consistent à assurer que la solution admet le comportement suivant à l'infini

$$u_k(\mathbf{x}) = u_{\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \frac{\exp(i\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} + o_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right). \quad (1.9)$$

En domaine temporel, cette expression devient

$$v(\mathbf{x}, t) = \Re\left(u_{\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \frac{\exp(i\|\mathbf{k}\|\|\mathbf{x}\| - i\omega t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} + o_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right). \quad (1.10)$$

Cette expression correspond à une onde sphérique se déplaçant à la vitesse  $c > 0$  dans le sens  $\|\mathbf{x}\|$  croissant.

Le but de la section 1.2 est de démontrer le théorème suivant

**Théorème 1.1** *Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact, il existe une unique fonction  $u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld (1.8) et l'équation de Helmholtz*

$$-\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.11)$$

**Le principe d'amplitude limite** Cette approche consiste à étudier le comportement en temps long de la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } t \geq 0, \\ v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

pour un terme source ayant une dépendance temporelle harmonique

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(\mathbf{x}, t) = \Re\left(f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) & \forall t \geq 0, \\ g(\mathbf{x}, t) = 0 & \forall t < 0. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

avec  $\omega = kc$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. Cette approche sélectionnera la solution sortante en introduisant de la causalité.

La section 1.3 donnera un cadre mathématique à cette approche. On y démontrera le théorème suivant

**Théorème 1.2** *On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| v(\mathbf{x}, t) - \Re\left(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (1.14)$$

avec  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par le théorème 1.1.

**Le principe d'absorption limite** Cette technique consiste à introduire un petit paramètre d'absorption  $\varepsilon > 0$ . On définit alors la solution variationnelle de l'équation coercive

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{k+i\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ tel que :} \\ -\Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - (k+i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.15)$$

On fait alors tendre le coefficient d'absorption  $\varepsilon$  vers  $0^+$  pour définir la solution sortante de l'équation de Helmholtz. Du point de vue physique cette technique consiste à introduire le phaseur de la solution du problème d'ondes amorties

$$-\Delta v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2\varepsilon}{c} \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 v(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) \quad (1.16)$$

Le terme de frottement introduit alors de la causalité et permet de sélectionner les ondes sortantes. L'objectif de la section 1.4 est de donner un cadre mathématique à ce principe en démontrant le résultat suivant

**Théorème 1.3** *On a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\| u_{k+i\varepsilon} - u_k \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (1.17)$$

avec  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par le théorème 1.1.

## 1.2 La condition de radiation de Sommerfeld

### 1.2.1 Fonction de Green et existence de solution sortante

Dans cette section nous démontrons l'existence d'une solution sortante de l'équation de Helmholtz à l'aide des fonctions de Green.

**Lemme 1.4** *Si  $u$  et  $\Delta u$  sont dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$  alors  $u$  est dans  $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$*

**Démonstration :**

Soit  $B$  la boule de rayon  $R$  et  $B'$  la boule de rayon  $2R$ . Par densité, il suffit de montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  tel que pour

$$\|\nabla u\|_{L^2(B)} \leq C \left( \|u\|_{L^2(B')} + \|\Delta u\|_{L^2(B')} \right), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \quad (1.18)$$

Soit  $\chi$  une fonction  $\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $\chi(\mathbf{x}) = 1$  dans  $B$  et  $\chi(\mathbf{x}) = 0$  hors de  $B'$  décroissante suivant  $r$ . D'après l'identité de Green, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \chi u\|^2 d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\chi u) \chi u d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (1.19)$$

On peut alors évaluer le terme à la droite de l'égalité en développant le laplacien

$$\Delta(\chi u) = \chi \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u + u \Delta \chi. \quad (1.20)$$

Il suit que

$$\chi \Delta(\chi u) = \chi^2 \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla(\chi u) + (\chi \Delta \chi - 2 \nabla \chi \cdot \nabla \chi) u. \quad (1.21)$$

On peut alors injecter cette dernière expression dans (1.19)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \chi u\|^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \chi^2 u \Delta u + 2 \nabla \chi \cdot \nabla(\chi u) u \\ &\quad + (\chi \Delta \chi - 2 \nabla \chi \cdot \nabla \chi) u^2 d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Comme  $\|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \|u\|_{L^2(B')} \|\Delta u\|_{L^2(B')} \\ &\quad + 2 C_1 \|\nabla \chi u\|_{B'} \|u\|_{L^2(B')} + C_2 \|u\|_{L^2(B')}^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

avec  $C_1 = \|\nabla \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$  et  $C_2 = \|\Delta \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ . Comme  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \frac{\|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2} \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} + 2 C_1^2 + C_2 \right) \|u\|_{L^2(B)}^2 + \frac{\|\Delta u\|_{L^2(B)}^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Il suit que

$$\frac{\|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2} \leq \left( \frac{1}{2} + 2 C_1^2 + C_2 \right) \|u\|_{L^2(B')}^2 + \frac{\|\Delta u\|_{L^2(B')}^2}{2}. \quad (1.25)$$

Comme  $\chi = 1$  dans  $B$ , il suit

$$\|\nabla u\|_{L^2(B)} \leq \|\nabla \chi u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (1.26)$$

On déduit (1.18). Ceci termine la preuve de la proposition. ■



Pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , on introduit la fonction  $G_k : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \quad (1.27)$$

**Lemme 1.5** *Pour tout  $k \in \mathbb{C}$ , la fonction  $G_k$  est une solution fondamentale de l'opérateur  $-\Delta - k^2$ , ie.*

$$-\Delta G_k - k^2 G_k = \delta(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad (1.28)$$

**Démonstration :**

Remarquons tout d'abord que  $G_k$  est un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  car  $G_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . Soit  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ . Nous raisonnons au sens des distributions

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Delta G_k + k^2 G_k, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \int_{\mathbb{R}^3} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \end{aligned} \right. \quad (1.29)$$

avec  $I_\varepsilon$  donné par

$$I_\varepsilon = \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (1.30)$$

D'après la formule de Green, on a

$$\left\{ \begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) (\Delta \Phi(\mathbf{x}) + k^2 \Phi(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\{\|\mathbf{x}\| > \varepsilon\}} (\Delta G_k(\mathbf{x}) + k^2 G_k(\mathbf{x})) \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\{\|\mathbf{x}\| = \varepsilon\}} G_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial r}(\mathbf{x}) - \frac{\partial G_k}{\partial r}(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}} \end{aligned} \right. \quad (1.31)$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer la dernière ligne car  $\Delta G_k(\mathbf{x}) + k^2 G_k(\mathbf{x}) = 0$  hors de l'origine. Comme  $\Phi$  est  $C^\infty$ , on a

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(0) + O(\|\mathbf{x}\|) \quad \text{et} \quad \partial_r \Phi(\mathbf{x}) = O(1). \quad (1.32)$$

De même, la fonction de Green vérifie

$$G_k(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \quad \text{et} \quad \partial_r G_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} + O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right). \quad (1.33)$$

Il suit

$$\begin{cases} I_\varepsilon = - \int_{\{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon\}} \frac{\Phi(0)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} + \int_{\{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon\}} O\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) ds_{\mathbf{x}} \\ = -\Phi(0) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1) \end{cases} \quad (1.34)$$

Ainsi, on a

$$\langle \Delta G_k + k^2 G_k, \Phi \rangle = -\Phi(0) \quad (1.35)$$

Ceci termine la preuve.  $\blacksquare$

**Proposition 1.6** Soient  $k \in \mathbb{R}$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. La fonction  $u_k(\mathbf{x}) = G_k * f(\mathbf{x})$  vérifie

$$\begin{cases} u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3), \\ -\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (1.36)$$

**Démonstration :**

Par définition, la fonction  $u_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est donnée par

$$u_k(\mathbf{x}) = G_k * f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (1.37)$$

La théorie de la convolution dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  nous permet d'obtenir que  $u_k$  est une solution de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$-(\Delta + k^2)(G_k * f)(\mathbf{x}) = -(\Delta G_k + k^2 G_k) * f(\mathbf{x}) = \delta * f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (1.38)$$

Nous remarquons aussi que  $u_k \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$  d'après le lemme 1.4. Comme le support de  $f$  est borné, il existe un réel positif  $\rho$  tel que la boule de rayon  $\rho$  contienne le support de  $f$ . Pour tout  $\mathbf{y}$  dans le support de  $f$  et pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $\|\mathbf{x}\| > 2\rho$ , on a

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} - \|\mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} + \frac{2\rho}{2} - \rho \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (1.39)$$

En majorant l'expression (1.37), il suit

$$|u_k(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{2\pi\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (1.40)$$

On intègre cette expression sur la sphère de rayon  $R$

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} \leq \frac{1}{\pi} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^2 = O_{R \rightarrow +\infty}(1). \quad (1.41)$$

De même, on a pour  $\|\mathbf{x}\| > 2\rho$

$$\nabla u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} \left( ik - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1.42)$$

$$\partial_r u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \left( ik - \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1.43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left( 1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) ik f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (1.44)$$

Il suit l'inégalité

$$\left\{ \begin{aligned} |\partial_r u_k(\mathbf{x}) - ik u_k(\mathbf{x})| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \\ &+ k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \left( 1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (1.45)$$

Nous remarquons alors que

$$1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left( \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (1.46)$$

Il suit d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right\| \quad (1.47)$$

Comme

$$\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} = \left( \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \quad (1.48)$$

on a

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \left| \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (1.49)$$

D'où d'après l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| 1 - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right| \leq \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq 2 \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}. \quad (1.50)$$

On déduit de (1.39) et (1.45) que

$$|\partial_r u_k(\mathbf{x}) - iku_k(\mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|)|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \quad (1.51)$$

On déduit de (1.39)

$$|\partial_r u_k(\mathbf{x}) - iku_k(\mathbf{x})| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|)|f(\mathbf{y})|}{\pi} d\mathbf{y} \right) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \quad (1.52)$$

En intégrant sur la sphère de rayon  $R$ , on a

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} &\leq \frac{4}{\pi R^2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^2 \left( 1 + \frac{k\rho}{2} \right)^2 \\ &= O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^2} \right). \end{aligned} \right. \quad (1.53)$$

■

Pour déterminer le cadre fonctionnelle de la fonction  $u_k$ , nous avons besoin d'un résultat classique de la théorie du potentiel newtonien.

**Proposition 1.7** Soient  $G_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}$ ,  $H_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2}$  et  $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. Les fonction  $w_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  et  $h_g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  définies par

$$w_g(\mathbf{x}) = G_0 * g(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad h_g = H_0 * g \quad (1.54)$$

vérifie  $w_g \in L^6(\mathbb{R}^3)$ ,  $h_g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et

$$-\Delta w_g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \nabla w_g = -h_g. \quad (1.55)$$

**Démonstration :**

C'est un résultat classique de la théorie du potentiel newtonien dont on rappelle une preuve directe.

D'après la proposition 1.5, la fonction  $G_0$  est une solution fondamentale du laplacien. D'autre part, on a  $\nabla G_0 = -H_0$ . Il suit que  $w_g = G_0 * g$  vérifie (1.55). Montrons maintenant que  $w_g$  est dans  $L^6(\mathbb{R}^3)$ . Soit  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  une fonction qui vaut 1 au voisinage de 0 et 0 au voisinage de l'infini. Remarquons que d'après l'inégalité de convolution de Young ( $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$  car  $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et  $g$  à support compact.

$$(\chi G_0) * g \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad \chi G_0 \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (1.56)$$

$$((1 - \chi)G_0) * g \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad (1 - \chi)G_0 \in L^6(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}^3). \quad (1.57)$$

On en déduit que  $w_g = \chi G_0 * g + ((1 - \chi)G_0) * g$  est dans  $L^6(\mathbb{R}^3)$ .

De même, on a  $h_g \in L^2(\mathbb{R}^3)$  car

$$(\chi H_0) * g \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad \chi H_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad (1.58)$$

$$((1 - \chi)H_0) * g \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{car} \quad (1 - \chi)H_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}^3). \quad (1.59)$$

Ceci termine la preuve. ■

**Proposition 1.8** *La fonction  $u_k = G_k * f$  est dans l'espace*

$$u_k \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3), \quad u_k \in L^6(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \nabla \hat{u}_k \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (1.60)$$

avec  $\hat{u}_k(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{x}) \exp(-ik\|\mathbf{x}\|)$

**Démonstration :**

Une borne supérieure de (1.37) est donnée par

$$\left| u_k(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{x}')|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} d\mathbf{x}' = w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad (1.61)$$

On déduit de la proposition 1.7 que  $u_k \in L^6(\mathbb{R}^3)$ . Comme  $-\Delta u_k - k^2 u_k = f$  dans  $\mathbb{R}^3$ , il suit qu'à la fois  $u_k$  et  $\Delta u_k$  sont dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ . On déduit du lemme 1.4 que  $u_k \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ .

Nous remarquons que

$$\exp(ikr) \nabla \hat{u}_k(\mathbf{x}) = \nabla u_k - ik u_k(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (1.62)$$

Cette expression se calcule à l'aide des formules de représentation

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \nabla u_k(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}). \quad (1.63)$$

$$\nabla G_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi} \left( \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{ik}{\|\mathbf{x}\|} \right) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (1.64)$$

il suit que

$$\left\{ \begin{aligned} \exp(ikr) \nabla \hat{u}_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &- ik \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (1.65)$$

En majorant, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \|\nabla \hat{u}_k(\mathbf{x})\| &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} \\ &+ k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| d\mathbf{y}. \end{aligned} \right. \quad (1.66)$$

On déduit alors de (1.50) que

$$\|\nabla \hat{u}_k(\mathbf{x})\| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + 2k\|\mathbf{y}\|) |f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} d\mathbf{y} = H_0 * g \quad (1.67)$$

avec  $g(\mathbf{y}) = (1 + 2k\|\mathbf{y}\|) |f(\mathbf{y})|$  et  $H_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2}$ . Comme  $f$  est un élément de  $L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact,  $g$  est aussi à support compact dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . D'après la proposition 1.7 il suit que  $\nabla \hat{u}_k \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . ■

## 1.2.2 Unicité de la solution sortante de l'équation d'Helmholtz

L'unicité de la solution sortante de l'équation provient du Théorème de Rellich :

**Théorème 1.9 (Théorème de Rellich sur tout  $\mathbb{R}^3$ )** Soit  $k > 0$ . Si  $u_k \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$

vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u_k(\mathbf{x}) - k^2 u_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}(1), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |(\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right). \end{cases} \quad (1.68)$$

alors la fonction  $u_k$  est identiquement nulle.

### Démonstration :

Remarquons tout d'abord que  $u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$  d'après le lemme 1.4. D'autre part, ses trois dérivées partielles vérifient

$$\partial_i u_k \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \Delta \partial_i u_k + k^2 \partial_i u_k = 0. \quad (1.69)$$

D'après le lemme 1.4, il suit que  $\partial_i u_k \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ . Ainsi  $u_k$  est un élément de  $H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ . On a d'après la formule de Green

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\nabla u_k(\mathbf{x})|^2 + \Delta u_k(\mathbf{x}) \overline{u_k(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{u_k(\mathbf{x})} \partial_r u_k(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{x}}. \quad (1.70)$$

Il suit

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\nabla u_k(\mathbf{x})|^2 - k^2 |u_k(\mathbf{x})|^2 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \overline{u_k(\mathbf{x})} (\partial_r - ik)u_k(\mathbf{x}) + ik |u_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (1.71)$$

On note  $\widehat{u}_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par

$$\widehat{u}_k(\mathbf{x}) = \frac{u_k(\mathbf{x})}{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}. \quad (1.72)$$

Il suit de l'identité  $\nabla \widehat{u}_k + ik \widehat{u}_k \widehat{e}_r = \exp(-ik\|\mathbf{x}\|) \nabla u_k$  que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\nabla \widehat{u}_k + ik \widehat{u}_k \widehat{e}_r|^2 - k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (1.73)$$

Ceci se simplifie en

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + ik \left( \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k} - \overline{\widehat{u}_k} \partial_r \widehat{u}_k \right) d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}}. \quad (1.74)$$

En prenant la partie imaginaire, on a

$$0 = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \widehat{u}_k \partial_r \widehat{u}_k - \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k} + 2ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (1.75)$$

On déduit alors que

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} ik (\widehat{u}_k \partial_r \widehat{u}_k - \widehat{u}_k \overline{\partial_r \widehat{u}_k}) d\mathbf{x} = 2k^2 \int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} \quad (1.76)$$

et par conséquent

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|<R\}} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + 2k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} \quad (1.77)$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression, on obtient

$$k \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} |\widehat{u}_k(\mathbf{x})|^2 ds_{\mathbf{x}} = -\Im \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k(\mathbf{x}) \overline{\widehat{u}_k(\mathbf{x})} \right) ds_{\mathbf{x}} \quad (1.78)$$

D'après le théorème de Cauchy-Schwartz, on a

$$k \|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})}^2 \leq \|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \quad (1.79)$$

et par conséquent

$$\|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} \leq \frac{\|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})}}{k}. \quad (1.80)$$

Comme  $\widehat{u}_k(\mathbf{x}) = \exp(-ik\|\mathbf{x}\|)u_k(\mathbf{x})$ , on déduit alors des conditions de radiation de Sommerfeld que

$$\|\partial_r \widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = \|\partial_r u_k - ik u_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R} \right) \quad (1.81)$$

et d'après (1.80)

$$\|\widehat{u}_k\|_{L^2(\{\|\mathbf{x}\|=R\})} = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R} \right). \quad (1.82)$$

En remarquant que d'après le théorème de Cauchy-Schwartz et (1.81) et (1.82)

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=R\}} \partial_r \widehat{u}_k \overline{\widehat{u}_k} + ik |\widehat{u}_k|^2 ds_{\mathbf{x}} = O_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{R^2} \right) \quad (1.83)$$

on peut alors passer à la limite sur (1.77)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \widehat{u}_k|^2 + 2k^2 |\widehat{u}_k|^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (1.84)$$

Il suit que  $\widehat{u}_k$  et par conséquent  $u_k$  s'annulent sur tout  $\mathbb{R}^3$ . ■



### 1.3 Le principe d'amplitude limite

Le problème (1.12) est bien posé d'après le théorème de Hille-Yoshida. Nous allons étudier le comportement en temps long de sa solution par l'intermédiaire d'une expression basée sur les fonctions de Green.

**Lemme 1.10** Une solution fondamentale du d'alembertien  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est la distribution  $G$  de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$  est définie par

$$\langle G, \Phi \rangle = c \int_0^\infty \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\tau. \quad (1.85)$$

**Démonstration :**

Le d'alembertien au sens des distributions de  $G$  est calculé par dualité

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle G, \square \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ = c \int_0^\infty \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\square \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt \end{array} \right. \quad (1.86)$$

Il peut aussi être décomposé de la manière suivante

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) - \frac{1}{r^2} \Delta_\Gamma. \quad (1.87)$$

D'après la formule de Green sur la sphère, on a

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\Delta_\Gamma \Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^3} ds_{\mathbf{x}} = \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\Phi(\mathbf{x}, \tau)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^3} \Delta_\Gamma(1) ds_{\mathbf{x}} = 0. \quad (1.88)$$

Soit  $\bar{\Phi}(r, t)$  la valeur moyenne de  $\Phi$  sur la sphère de rayon  $r$

$$\bar{\Phi}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta, \varphi, t) \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (1.89)$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_t^2 \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} \frac{\tau}{c} \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_r^2 \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} c\tau \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{2\partial_r \Phi(c\tau, \theta, \varphi, \tau)}{4\pi} \sin(\theta) d\theta d\varphi. \end{array} \right. \quad (1.90)$$

On peut alors commuter l'intégrale et la dérivée seconde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{\tau}{c} \partial_t^2 \bar{\Phi}(c\tau, \tau), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = c\tau \partial_r^2 \bar{\Phi}(c\tau, \tau), \\ \int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = 2\partial_r \bar{\Phi}(c\tau, \tau). \end{array} \right. \quad (1.91)$$

En sommant ces trois expressions, il suit

$$\int_{\{\|\mathbf{x}\|=c\tau\}} \frac{\square \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{\tau}{c} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c\tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau) d\tau. \quad (1.92)$$

On obtient

$$\langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \int_0^\infty \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c^2 \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau) d\tau. \quad (1.93)$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue en introduisant la fonction

$$\Psi(r, t) = \frac{r}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(r, t) - \bar{\Phi}(r, t) - r \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(r, t) \quad (1.94)$$

qui vérifie

$$\frac{d}{d\tau} \left( \Psi(c\tau, \tau) \right) = \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(c\tau, \tau) - c^2 \tau \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(c\tau, \tau) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(c\tau, \tau). \quad (1.95)$$

Ainsi il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \left[ \Psi(c\tau, \tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=+\infty} = -\Psi(0, 0) \\ = \overline{\Phi(0, 0)} = \Phi(0, 0). \end{array} \right. \quad (1.96)$$

C'est à dire

$$\square G(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mathbf{x}} \delta_t \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}). \quad (1.97)$$

■

**Lemme 1.11** *L'unique solution de (1.12) est donnée par*

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<ct\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \quad (1.98)$$

**Démonstration :**

L'unique solution de (1.12) est donnée par

$$u(\mathbf{x}, t) = G * g(\mathbf{x}, t) \quad (1.99)$$

Le produit de convolution au sens des distributions est défini par

$$\langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle G \otimes g, \psi \rangle_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} \quad \text{avec } \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) \quad (1.100)$$

C'est à dire

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= c \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^4} g(\mathbf{y}, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau) d\mathbf{y} d\tau}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt \\ &= c \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}\|=ct\}} \frac{g(\mathbf{y}, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau)}{4\pi \|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt d\mathbf{y} d\tau \end{aligned} \right. \quad (1.101)$$

On effectue alors le changement de variable

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad t' = t + \tau, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}, \quad \rho = ct. \quad (1.102)$$

On obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\rho}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho d\mathbf{y} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho d\mathbf{y} dt \end{aligned} \right. \quad (1.103)$$

On remarque alors que

$$\int_0^{+\infty} \left( \int_{\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\rho\}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ds_{\mathbf{x}} \right) d\rho = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.104)$$

Il suit

$$\left\{ \begin{aligned} \langle G * g, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^4} &= \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c}) \varphi(\mathbf{x}, t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{x} d\mathbf{y} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \right) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \end{aligned} \right. \quad (1.105)$$

D'où  $G * g$  est donnée par

$$G * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\mathbf{y}, t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}{c})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}. \quad (1.106)$$

Enfin que  $g(\mathbf{x}, t) = 0$  pour tout  $t < 0$ , on obtient (1.98). ■

**Lemme 1.12** *La solution du problème (1.12) est donnée par*

$$u(\mathbf{x}, t) = \Re\left(u_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)\right) + r(\mathbf{x}, t). \quad (1.107)$$

avec

$$\begin{cases} u_k(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}, \\ |r(\mathbf{x}, t)| &\leq \int_{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > ct} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y} \end{cases} \quad (1.108)$$

**Démonstration :**

Il nous faut tenir compte ici de la forme particulière du terme source

$$g(\mathbf{y}, t) = \Re\left(f(\mathbf{y}) \exp(-i\omega t)\right). \quad (1.109)$$

Il suit d'après le lemme 1.11

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) &= \Re\left(\exp(-i\omega t) \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < ct} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}\right) \\ &= \Re\left(\exp(-i\omega t) u_k(\mathbf{x})\right) + r(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (1.110)$$

avec

$$r(\mathbf{x}, t) = \Re\left(\exp(-i\omega t) \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > ct} \frac{f(\mathbf{y}) \exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}\right). \quad (1.111)$$

Cette dernière fonction peut être majorée par

$$|r(\mathbf{x}, t)| = \int_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > ct} \frac{|f(\mathbf{y})|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\mathbf{y}. \quad (1.112)$$

Ceci termine la preuve. ■

On est en mesure de démontrer le principe d'amplitude limite

**Théorème 1.13** *On a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\mathbf{x}, t) - \Re(\exp(-i\omega t) u_k(\mathbf{x}))\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (1.113)$$

### Démonstration :

Il nous suffit de montrer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|r(\cdot, t)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0 \quad (1.114)$$

On remarque tout d'abord que

$$\left| r(\mathbf{x}, t) \right| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall t > 0 \quad (1.115)$$

avec  $w_{|f|}$  défini par (1.54) qui vérifie d'après le lemme 1.7,

$$\|w_{|f|}\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} < +\infty. \quad (1.116)$$

D'autre part comme  $f$  est à support compact, on a

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists t_{\mathbf{x}} > 0 \quad \forall \mathbf{y} \notin B(\mathbf{x}, ct_{\mathbf{x}}) \quad f(\mathbf{y}) = 0. \quad (1.117)$$

Il suit que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et pour  $t > t_{\mathbf{x}}$

$$r(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.118)$$

Ainsi, la fonction  $r(\mathbf{x}, t)$  converge simplement pour  $t$  tendant vers l'infini. On peut alors appliquer le théorème de Lebesgues. ■

## 1.4 Le principe d'absorption limite

**Proposition 1.14** Soient  $k, \varepsilon > 0$  et  $f$  : une fonction de classe  $L^2(\mathbb{R}^3)$  à support compact. La fonction

$$u_{k+i\varepsilon} = G_{k+i\varepsilon} * f = \int_{\Gamma} \frac{\exp((ik - \varepsilon)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) f(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{y}} \quad (1.119)$$

est l'unique élément de  $H^1(\mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$-\Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - (k + i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (1.120)$$

### Démonstration :

D'après le lemme 1.5,  $G_{k+i\varepsilon}$  est une fonction de Green de  $-\Delta - (k + i\varepsilon)^2$ . La fonction  $u_{k+i\varepsilon} = G_{k+i\varepsilon} * f$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) + (k + i\varepsilon)^2 u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) = \left( \Delta G_{k+i\varepsilon} + (k + i\varepsilon)^2 G_{k+i\varepsilon} \right) * f(\mathbf{x}) \\ \hspace{15em} = -\delta * f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (1.121)$$

Pour  $\|\mathbf{x}\| > 2r$  ( $\text{support}(f) \subset B(0, r)$ ), on a d'après (1.39)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}. \quad (1.122)$$

En majorant l'expression (1.119), il suit qu'au voisinage de l'infini

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\varepsilon\|\mathbf{x}\|}{2})}{2\pi\|\mathbf{x}\|} \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (1.123)$$

Il suit que la fonction  $u_{k+i\varepsilon}$  est donc dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . On agit de même pour le gradient. On a

$$\nabla u_k(\mathbf{x}) = (\nabla G_{k+i\varepsilon}) * f \quad (1.124)$$

Comme  $\nabla G_{k+i\varepsilon}$  est exponentiellement décroissant  $u_{k+i\varepsilon}$  is  $H^1(\mathbb{R}^3)$ . ■

On est en mesure de démontrer le théorème 1.3 :

**Démonstration :**

nous remarquons tout d'abord que

$$G_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - G_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x}\|)}{ik\|\mathbf{x}\|} \left( \frac{\exp(-\varepsilon\|\mathbf{x}\|) - 1 + \frac{\varepsilon}{ik}}{1 - \frac{\varepsilon}{ik}} \right) \quad (1.125)$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| &= (G_{k+i\varepsilon} - G_k) * f(\mathbf{x}) \\ \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(ik\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \left( \frac{\exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|) - 1 + \frac{\varepsilon}{ik}}{1 - \frac{\varepsilon}{ik}} \right) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right| & \quad (1.126) \end{aligned}$$

On peut alors passer à la valeur absolue

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(\mathbf{x}')|}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \left| \frac{\exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|) - 1 + \frac{\varepsilon}{ik}}{1 - \frac{\varepsilon}{ik}} \right| d\mathbf{x}' \quad (1.127)$$

Comme  $\left| \frac{\exp(-\varepsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|) - 1 + \frac{\varepsilon}{ik}}{1 - \frac{\varepsilon}{ik}} \right| \leq 2$ , on a

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| \leq 2 w_{|f|}(\mathbf{x}) \quad (1.128)$$

avec  $w_{|f|}$  la fonction définit par (1.54) du lemme 1.7. D'autre part on a pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et  $\text{supp}(f) \subset B(0, r)$

$$\left| u_{k+i\varepsilon}(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{x}) \right| \leq w_{|f|}(\mathbf{x}) \frac{\exp(-\varepsilon(\|\mathbf{x}\| - r)) - 1 + \frac{\varepsilon}{ik}}{1 - \frac{\varepsilon}{ik}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (1.129)$$

Comme  $w_{|f|} \in L^6(\mathbb{R}^3)$  et que le terme de droite de (1.129) tend simplement vers 0 presque partout, il suit du théorème de Lebesgues

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u_k - u_{k+i\varepsilon} \right\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (1.130)$$

■